Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre :

I. Définitions :

- Soit $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b et c trois fonctions de $\mathcal{C}(\mathcal{I},\mathbb{R})$. On note $(\mathcal{H})$ $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ l'équation différentielle réelle linéaire d' 1^{er} ordre.
- Soit $\mathcal{J}$ un intervalle de $\mathcal{I}$ et f$\in \mathcal{D}(\mathcal{J},\mathbb{K})$, f est solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{J}$.

Si et seulement si, quel que soit x$\in \mathcal{J}$, $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$

- Il est évident que si f est solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{J}$ alors f est aussi solution de $(\mathcal{H})$ sur tout intervalle $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$
- On appelle **solution maximale** de $(\mathcal{H})$ une solution de $(\mathcal{H})$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$ le plus grand possible.
- **Résoudre $(\mathcal{H})$** consiste à trouver l'ensemble des solutions maximales.
- Soit $x_0 \in \mathcal{I}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, l'écriture $(\mathcal{C})$ $\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ s'appelle le problème de Cauchy pour $(\mathcal{H})$ en (x_0, y_0).
- Résoudre $(\mathcal{C})$ consiste à trouver les solutions maximales $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ de $(\mathcal{H})$ tel que $x_0 \in \mathcal{I}$ et $f(x_0) = y_0$.

II. Méthode de résolution des équations différentielles d'ordre un :

Soit $(\mathcal{H})$: $u(x)y' + v(x)y = w(x)$

- **$1^{ère}$ étape :**

On détermine les intervalles sur lesquels la fonction u ne s'annule pas, et sur chacun d'eux, on résout l'équation $(\mathcal{E})$: $y' + a(x)y = b(x)$, obtenue en divisant les deux membres de $(\mathcal{H})$ par $u(x)$.
Dans la suite, a et b sont des fonctions continue sur $\mathcal{I}$.

- **$2^{éme}$ étape :**

On résout l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathcal{I}$: $y' + a(x)y = 0$
Toute solution y_0 de $(\mathcal{E}_0)$ est de la forme $y_0(x) = ke^{-A(x)}$.
Où A est une primitive de a sur $\mathcal{I}$ et $k \in \mathbb{R}$ quelconque

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

- **$3^{éme}$étape :**

① Si on connait une solution particulière ŷ (constante ou obtenue autrement), les solutions sont de la forme :

$$x \to \hat{y}(x) + y_0(x) = \hat{y}(x) + ke^{-A(x)}$$

② Sinon, on applique la méthode de la « variation » de la constante ou méthode de Lagrange : on cherche les solutions de $(\mathcal{E})$ sous le forme $y(x) = k(x)e^{-A(x)}$.
Et par remplacement dans $(\mathcal{E})$, on obtient : $k'(x)e^{-A(x)} = b(x)$, d'où $k(x)$ par calcul de primitive sur $\mathcal{I}$.

$$k(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,dx$$

Avec une condition initiale $y(x_0) = y_0$ donnée, on a l'écriture générale :

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt + y_0 e^{A(x_0)}\right)e^{-A(x)}$$

III. Remarques et observation :

Remarque 1 : méthode du « physicien »
On peut parfaitement résoudre $(\mathcal{E}_0)$ en écrivant $\frac{y'}{y} = -a(x)$ et en intégrant chaque membre, à condition d'utiliser le résultat suivant :
Si y est une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathcal{I}$, soit y est nulle sur $\mathcal{I}$, soit y est ne s'annule jamais sur $\mathcal{I}$.

Remarque 2 : lorsque des valeurs absolues apparaissent dans les primitives, il faut essayer dans la mesure du possible de trouver une autre écriture, sans valeur absolue, quitte à changer le signe d'une constante.

Remarque 3 : Attention à bien changer de constante pour la solution de $(\mathcal{E}_0)$, lorsque l'on passe d'un intervalle à l'autre.

Remarque 4 : La recherche de solutions définies des points M où $u(x)$ s'annule (au bord des intervalles sur lesquels on a effectué la résolution) revient à déterminer des constantes (si elles existent) pour lesquelles les fonctions admettent des limites à gauche et à droite en M, égales. Ensuite, on vérifie si la dérivabilité en M de la fonction ainsi définie par prolongement est assurée.

Remarque 5 : Toute équation de la forme $u(x)y'' + v(x)y' = w(x)$ est ramenée au cas d'une équation linéaire du 1er ordre.
En posant comme inconnue auxiliaire : $z = y'$